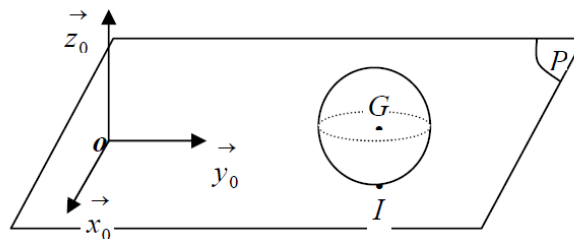


## Al Hoceima

**Exercice 1 :**

Une sphère  $(S)$  pleine et homogène, de centre  $G$ , de rayon  $a$ , roule de manière quelconque sur un plan fixe horizontal  $(P)$ . Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé fixe lié au plan tel que  $\vec{z}_0 \perp (P)$ . Soit  $R_S(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  un repère orthonormé direct, lié à la sphère tel que :  $\vec{OG} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + a \vec{z}_0$ . L'orientation du repère  $R_S$  par rapport à  $R_0$  se fait par les angles d'Euler classiques  $\psi, \theta, \varphi$ . On prendra  $R_0$  comme repère de projection.

1. Etablir les figures planes de rotation de la sphère ;
2. Donner l'expression du vecteur rotation instantané de la sphère ;
3. Déterminer la vitesse du point de contact  $I$  de la sphère avec le plan fixe.
4. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

**Solution :**

$(S)$  : est une sphère homogène de rayon  $a$  ;  $(P)$  : un plan fixe ;  $\vec{OG} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + a \vec{z}_0$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : repère fixe ;  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in (P)$  et  $\vec{z}_0 \perp (P)$

$R_S(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  : repère lié à la sphère.

Le passage du repère  $R_S$  vers le repère  $R_0$  se fait par trois rotations utilisant les angles d'Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  et deux repères intermédiaires  $R_1$  et  $R_2$

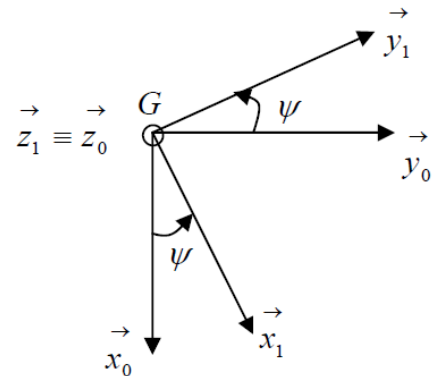
## 1. Les figures planes :

a) *Passage du repère  $R_1$  vers  $R_0$*  : la rotation se fait autour de l'axe  $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

Matrice de passage du repère  $R_1$  vers  $R_0$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_1 \rightarrow R_0}$$

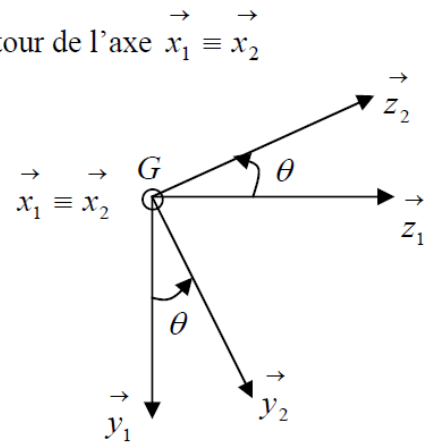


b) *Passage du repère  $R_2$  vers  $R_1$*  : la rotation se fait autour de l'axe  $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$

Matrice de passage de  $R_2$  vers  $R_1$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_2 \rightarrow R_1}$$

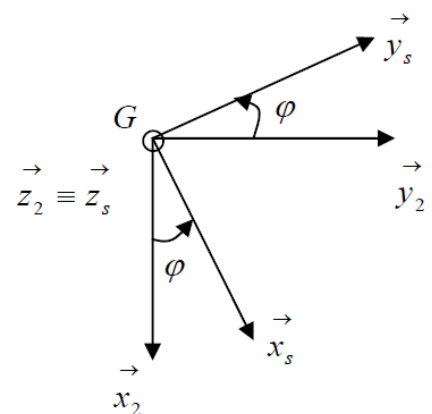


c) *Passage du repère  $R_s$  vers  $R_2$*  : la rotation se fait autour de l'axe  $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_s$

Matrice de passage de  $R_s$  vers  $R_2$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_s \rightarrow R_2}$$



## 2. Vecteur rotation instantané de la sphère dans le repère $R_0$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \vec{\Omega}_s^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi} \vec{z}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

Exprimons  $\vec{x}_1$  et  $\vec{z}_0$  dans le repère  $R_0$ . D'après les matrices de passage nous avons :

$$\vec{x}_1 = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_2 = -\sin \theta \vec{y}_1 + \cos \theta \vec{z}_1 = -\sin \theta \left( -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0 \right) + \cos \theta \vec{z}_0$$

$$\vec{z}_2 = \sin \theta \sin \psi \vec{x}_0 - \sin \theta \cos \psi \vec{y}_0 + \cos \theta \vec{z}_0$$

ce qui donne :  $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\varphi} \left( \sin \theta \sin \psi \vec{x}_0 - \sin \theta \cos \psi \vec{y}_0 + \cos \theta \vec{z}_0 \right) + \dot{\theta} \left( \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0 \right) + \dot{\psi} \vec{z}_0$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \left( \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) \vec{x}_0 + \left( -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \right) \vec{y}_0 + \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \begin{cases} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases}_{R_0}$$

## 3. Vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe

Les points G et I appartiennent à la sphère. Par la cinématique du solide, nous pouvons connaître la

vitesse du point I à partir de celle de G, en effet nous avons :  $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{GI}$

$$\text{Avec : } \vec{OG} = \begin{cases} x \\ y \\ a \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\text{et } \vec{OI} = \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{GI} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -a \end{cases}_{R_0}$$

$$\vec{V}^0(I) = \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{matrix} \wedge \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{matrix}, \text{ on obtient finalement :}$$

$$\vec{V}^0(I) = \begin{matrix} \dot{x} - a \left( -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \right) \\ \dot{y} + a \left( \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) \\ 0 \end{matrix}$$

#### 4. Condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite il faut que la vitesse du point I soit

$$\text{nulle : } \vec{V}^0(I) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - a \left( -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \right) = 0 & (1) \\ \dot{y} + a \left( \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (1) par  $\sin \psi$  et l'équation (2) par  $\cos \psi$  puis on fait la différence des deux

$$\text{équations : } \begin{cases} \dot{x} \sin \psi - a \left( -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi + \dot{\theta} \sin^2 \psi \right) = 0 & (1) \\ \dot{y} \cos \psi + a \left( \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta} \cos^2 \psi \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi + a \dot{\theta} = 0$$

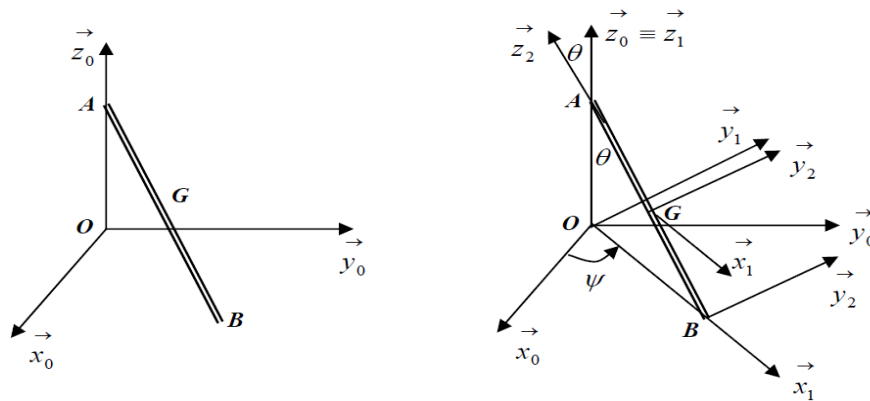
$$\text{comme nous avons aussi : } \sin \psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \cos \psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{L'équation devient : } \frac{y \dot{x} - x \dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a \dot{\theta} = 0$$

**Exercice 2 :**

Une tige homogène de longueur  $AB = L$  et de centre  $G$  est en mouvement tel que, son extrémité  $A$  soit assujéti à se déplacer suivant l'axe vertical  $(O, \vec{z}_0)$  d'un repère orthonormé fixe  $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . L'autre extrémité  $B$  est en mouvement quelconque dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

1. Déterminer le nombre de paramètres nécessaires pour décrire totalement le mouvement de la tige et construire les différents repères permettant de faire l'étude cinématique de la tige ;
2. Déterminer la vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à  $R_0$
3. Déterminer les différentes figures planes et les matrices de passage;
4. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue des points A, B et G exprimé dans le repère  $R_1$ .



**Solution :**

**1. Repères et paramètres permettant l'étude du mouvement de la tige**

$AB = L$  ;  $A \in (O, \vec{z}_0)$  tous le temps,  $B \in (x_0 O y_0)$

$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : repère fixe ;

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère tel que :  $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ ,  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$  et  $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  un repère tel que :  $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$ ,  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \psi$  et  $\vec{\Omega}_2^1 \equiv -\dot{\theta} \vec{y}_1 = -\dot{\theta} \vec{y}_2$

on a ainsi :  $AB \in R_2$  tel que :  $\vec{BA} = L \vec{z}_2$

Les deux angles  $\psi$  et  $\theta$  sont suffisant pour décrire entièrement le mouvement de la barre par rapport au repère  $R_0$ .

**2. Vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à  $R_0$**

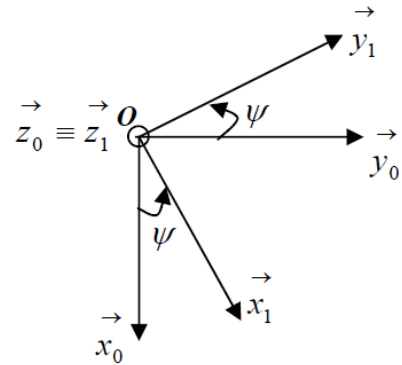
Nous avons :  $\vec{\Omega}_2^0 \equiv \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 \equiv -\dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_1 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_1}$

### 3. Figure plane de chaque repère ;

#### 3.1. Matrice de passage du repère $R_0$ vers $R_1$

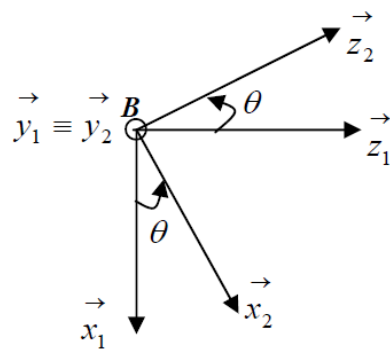
Matrice de passage de  $R_0$  vers  $R_1$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad P_{R_0 \rightarrow R_1}$$



#### 3.1. Matrice de passage du repère $R_2$ vers $R_1$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad P_{R_2 \rightarrow R_1}$$



$$\vec{\Omega}_2^0 \equiv -\dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_1 = -\dot{\theta}(-\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0) + \dot{\psi} \vec{z}_0 = \begin{cases} \dot{\theta} \sin \psi \\ -\dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_0}$$

On prendra  $R_1$  comme repère de projection car les expressions cinématiques sont plus simples dans ce repère.

### 4. Vitesse et Accélération absolue des points $A, B$ et $G$ exprimé $R_1$ .

$$\text{Nous avons : } \vec{OA} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \cos \theta \end{cases}_{R_1}, \quad \vec{OB} = \begin{cases} L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}, \quad \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \begin{cases} \frac{L}{2} \sin \theta \\ 0 \\ \frac{L}{2} \cos \theta \end{cases}_{R_1}$$

$$4.1. \text{ calcul de } \vec{V}^0(A) : \vec{V}^0(A) = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{V}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \cos \theta \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}_{R_1}$$

#### 4.2. calcul de $\vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OB}$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix} + \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right. \wedge \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \dot{\theta} \cos \theta \\ L \dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

La vitesse du point B peut aussi s'obtenir à partir de celle de A par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -L \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix} + \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array} \right. \wedge \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \sin \theta \\ 0 \\ -L \cos \theta \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \dot{\theta} \cos \theta \\ L \dot{\psi} \sin \theta \\ -L \dot{\theta} \sin \theta + L \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} L \dot{\theta} \cos \theta \\ L \dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

#### 4.3. calcul de $\vec{V}^0(G)$ : $\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG}$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix} + \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right. \wedge \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \sin \theta \\ 0 \\ \frac{L}{2} \cos \theta \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix}$$

La vitesse du point G peut aussi s'obtenir à partir de celle de A ou de B par la cinématique du solide, en effet nous avons :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AG}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -L \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix} + \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array} \right. \wedge \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \sin \theta \\ 0 \\ -\frac{L}{2} \cos \theta \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta \\ -L \dot{\theta} \sin \theta + \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right. \end{matrix}$$

4.4. calcul de  $\vec{\gamma}^0(A)$  :  $\vec{\gamma}^0(A) = \frac{d^0 \vec{V}^0(A)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(A)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(A)$

$$\vec{V}^0(A) = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta} \sin \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$

4.5. calcul de  $\vec{\gamma}^0(B)$  :  $\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^0 \vec{V}^0(B)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} \begin{matrix} L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ L\dot{\psi} \sin \theta + L\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \begin{matrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ L\dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} \begin{matrix} L\ddot{\theta} \cos \theta - L(\dot{\theta}^2 + L\dot{\psi}^2) \sin \theta \\ L\dot{\psi} \sin \theta + 2L\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$

4.6. calcul de  $\vec{\gamma}^0(G)$  :  $\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G)$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} \begin{matrix} \frac{L}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta + \frac{L}{2} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ -\frac{L}{2} \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \begin{matrix} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{matrix} \begin{matrix} \frac{L}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{L}{2} \dot{\psi}^2 \sin \theta \\ \frac{L}{2} \dot{\psi} \sin \theta + L\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ -\frac{L}{2} \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$